Prof. Dr. Alfred Toth

Zur Theorie der Relationalzahlen II

1. In dieser Fortsetzung (vgl. Toth 2011) untersuchen wir Wechsel und Strukturen trichotomischer Peirce-Zahlen innerhalb von n-adischen Relationen, beginnend mit einer Neuinterpretation 3-adischer Strukturen nach Toth (2007), aus dessen letztem Kapitel auch die einschlägigen Passagen reproduziert sind.

2. Triadisch-trichotomische Semiotik

Die 10 triadischen Zkln×Rthn sind:

1	3.1	2.1	1.1	×	1.1	1.2	1.3	1^3
2	3.1	2.1	1.2	×	2.1	1.2	1.3	$2^1 1^2$
3	3.1	2.1	1.3	×	3.1	1.2	1.3	$3^1 1^2$
4	3.1	2.2	1.2	×	2.1	2.2	1.3	$2^2 1^1$
5	**3.1**	**2.2**	**1.3**	**×**	**3.1**	**2.2**	**1.3**	$\mathbf{3^1 2^1 1^1}$
6	3.1	2.3	1.3	×	3.1	3.2	1.3	$3^2 1^1$
7	3.2	2.2	1.2	×	2.1	2.2	2.3	2^3
8	3.2	2.2	1.3	×	3.1	2.2	2.3	$3^1 2^2$
9	3.2	2.3	1.3	×	3.1	3.2	2.3	$3^2 2^1$
10	3.3	2.3	1.3	×	3.1	3.2	3.3	3^3

1. Thematisationsrichtung:

   $X^m Y^n$ mit $X \in \{1, 2, 3\}$, wobei $X = Y$ erlaubt und $m, n \in \{1, 2\}$ mit $X^m \rightarrow Y^n$, falls $m > n$ bzw. $X^m \leftarrow Y^n$, falls $m < n$. (Der Fall $m = n$ tritt nicht auf.)

2. Mehrdeutige Thematisationen und Thematisationsrichtungen gibt es bei den HZkln×HRthn 1, 7 und 10. Bei 1 und 10 könnte man aus strukturellen Gründen Links- bzw. Rechtsthematisation stipulieren; dies ist jedoch bei 7 nicht möglich. Also gibt es keine einheitlichen Thematisationsrichtungen bei den homogenen Thematisationen, d.h. bei den HZkln×HRthn.

3. Triadische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten:

$$\begin{array}{llllllll}
5. & 3.1 & 2.2 & 1.3 & \times & \underline{3.1 \quad 2.2} & 1.3 & 3^1 2^1 \rightarrow 1^1 \\
 & & & & & \underline{3.1} \quad 2.2 & \underline{1.3} & 3^1 \rightarrow 2^1 \leftarrow 1^1 \\
 & & & & & 3.1 \quad \underline{2.2} & \underline{1.3} & 3^1 \leftarrow 2^1 1^1
\end{array}$$

3. Tetradisch-tetratomische Semiotik

1	3.0	2.0	1.0	0.0	×	0.0	0.1	0.2	0.3	0^4
2	3.0	2.0	1.0	0.1	×	1.0	0.1	0.2	0.3	$1^1 0^3$
3	3.0	2.0	1.0	0.2	×	2.0	0.1	0.2	0.3	$2^1 0^3$
4	3.0	2.0	1.0	0.3	×	3.0	0.1	0.2	0.3	$3^1 0^3$
5	3.0	2.0	1.1	0.1	×	1.0	1.1	0.2	0.3	$1^2 0^2$
6	3.0	2.0	1.1	0.2	×	2.0	1.1	0.2	0.3	$2^1 1^1 0^2$
7	3.0	2.0	1.1	0.3	×	3.0	1.1	0.2	0.3	$3^1 1^1 0^2$
8	3.0	2.0	1.2	0.2	×	2.0	2.1	0.2	0.3	$2^2 0^2$
9	3.0	2.0	1.2	0.3	×	3.0	2.1	0.2	0.3	$3^1 2^1 0^2$
10	3.0	2.0	1.3	0.3	×	3.0	3.1	0.2	0.3	$3^2 0^2$
11	3.0	2.1	1.1	0.1	×	1.0	1.1	1.2	0.3	$1^3 0^1$
12	3.0	2.1	1.1	0.2	×	2.0	1.1	1.2	0.3	$2^1 1^2 0^1$
13	3.0	2.1	1.1	0.3	×	3.0	1.1	1.2	0.3	$3^1 1^2 0^1$
14	3.0	2.1	1.2	0.2	×	2.0	2.1	1.2	0.3	$2^2 1^1 0^1$
15	**3.0**	**2.1**	**1.2**	**0.3**	**×**	**3.0**	**2.1**	**1.2**	**0.3**	$\mathbf{3^1 2^1 1^1 0^1}$
16	3.0	2.1	1.3	0.3	×	3.0	3.1	1.2	0.3	$3^2 1^1 0^1$
17	3.0	2.2	1.2	0.2	×	2.0	2.1	2.2	0.3	$2^3 0^1$
18	3.0	2.2	1.2	0.3	×	3.0	2.1	2.2	0.3	$3^1 2^2 0^1$
19	3.0	2.2	1.3	0.3	×	3.0	3.1	2.2	0.3	$3^2 2^1 0^1$
20	3.0	2.3	1.3	0.3	×	3.0	3.1	3.2	0.3	$3^3 0^1$
21	3.1	2.1	1.1	0.1	×	1.0	1.1	1.2	1.3	1^4
22	3.1	2.1	1.1	0.2	×	2.0	1.1	1.2	1.3	$2^1 1^3$
23	3.1	2.1	1.1	0.3	×	3.0	1.1	1.2	1.3	$3^1 1^3$
24	3.1	2.1	1.2	0.2	×	2.0	2.1	1.2	1.3	$2^2 1^2$
25	3.1	2.1	1.2	0.3	×	3.0	2.1	1.2	1.3	$3^1 2^1 1^2$
26	3.1	2.1	1.3	0.3	×	3.0	3.1	1.2	1.3	$3^2 1^2$
27	3.1	2.2	1.2	0.2	×	2.0	2.1	2.2	1.3	$2^3 1^1$
28	3.1	2.2	1.2	0.3	×	3.0	2.1	2.2	1.3	$3^1 2^2 1^1$
29	3.1	2.2	1.3	0.3	×	3.0	3.1	2.2	1.3	$3^2 2^1 1^1$
30	3.1	2.3	1.3	0.3	×	3.0	3.1	3.2	1.3	$3^3 1^1$
31	3.2	2.2	1.2	0.2	×	2.0	2.1	2.2	2.3	2^4
32	3.2	2.2	1.2	0.3	×	3.0	2.1	2.2	2.3	$3^1 2^3$
33	3.2	2.2	1.3	0.3	×	3.0	3.1	2.2	2.3	$3^2 2^2$
34	3.2	2.3	1.3	0.3	×	3.0	3.1	3.2	2.3	$3^3 2^1$
35	3.3	2.3	1.3	0.3	×	3.0	3.1	3.2	3.3	3^4

Für die tetradische Semiotik können wir folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Bei den triadischen Thematisationen treten erstmals solche vom Typ $X^{m}Y^{m} \leftarrow Z^{2m}$ bzw $Z^{2m} \rightarrow X^{m}Y^{m}$ auf. Hier wurde die Thematisationsrichtung gemäß der größten Frequenz einer einzelnen Kategorie festgelegt.

2. Während die Sandwiches der dyadischen Thematisationen vom Typ $X^{m} \leftrightarrow Y^{m}$ sind, sind diejenigen der triadischen Thematisationen vom Typ $X^{m} \leftarrow Y^{2m} \rightarrow Z^{m}$. Da man sich auch eine (in der pentadischen Semiotik tatsächlich auftretende) Struktur $X^{m} \rightarrow Y^{2m} \leftarrow Z^{m}$ denken kann, nannten wir die erste zentrifugal und nennen wir die zweite zentripetal.

3. Tetradische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten. Rein theoretisch sind folgende 10 Thematisationstypen möglich:

$$
\begin{array}{llll}
15 & 3.0 \quad 2.1 \quad 1.2\,0.3 & \times & \underline{3.0\ \ 2.1\ \ 1.2}\ \ 0.3 \quad 3^{1}2^{1}1^{1} \rightarrow 0^{1} \\
 & & & \underline{3.0\ \ 2.1}\ \ 1.2\ \ 0.3 \quad 3^{1}2^{1} \rightarrow 1^{1}0^{1} \\
 & & & \underline{3.0}\ \ 2.1\ \ 1.2\ \ 0.3 \quad 3^{1} \rightarrow 2^{1}1^{1}0^{1} \\
 & & & 3.0\ \ \underline{2.1\ \ 1.2\ \ 0.3} \quad 3^{1} \leftarrow 2^{1}1^{1}0^{1} \\
 & & & 3.0\ \ 2.1\ \ \underline{1.2\ \ 0.3} \quad 3^{1}2^{1} \leftarrow 1^{1}0^{1} \\
 & & & 3.0\ \ 2.1\ \ 1.2\ \ \underline{0.3} \quad 3^{1}2^{1}1^{1} \leftarrow 0^{1} \\
 & & & \underline{3.0}\ \ 2.1\ \ 1.2\ \ \underline{0.3} \quad 3^{1} \rightarrow 2^{1}1^{1} \leftarrow 0^{1} \\
 & & & 3.0\ \ \underline{2.1\ \ 1.2}\ \ 0.3 \quad 3^{1} \leftarrow 2^{1}1^{1} \rightarrow 0^{1} \\
 & & & 3.0\ \ \underline{2.1}\ \ 1.2\ \ 0.3 \quad 3^{1} \leftarrow 2^{1} \rightarrow 1^{1}0^{1}
\end{array}
$$

$$3.0\ \ 2.1\ \ \underline{1.2}\ \ 0.3 \quad 3^{1}2^{1} \leftarrow 1^{1} \rightarrow 0^{1}$$

Man könnte die Regel aufstellen: $X^{m}Y^{m}Z^{m} \rightarrow A^{m}$ wegen $3m > m$. Dann würden die Typen $3^{1} \rightarrow 2^{1}1^{1}0^{1}$ und $3^{1}2^{1}1^{1} \leftarrow 0^{1}$ als regelwidrig entfallen. Unklar bleiben dann aber immer noch $3^{1}2^{1} \rightarrow 1^{1}0^{1}$ und $3^{1}2^{1} \leftarrow 1^{1}0^{1}$. Von den vier Sandwiches sind die beiden letzten rechts- bzw. linksmehrfach.

4. Pentadisch-pentatomische und hexadisch-hexatomische Semiotik

3. Strukturen der pentadischen, hexadischen und n-adischen Semiotik

Wieviel Raum die Darstellung höherwertiger Semiotiken für n > 4 einnehmen würde, läßt sich daran ermessen, daß schon die pentadische Semiotik 126 und die hexadische 462 Zeichenklassen zu ihrer Darstellung benötigen. Wenn man sich nun die Zahlen 10, 35, 126, 462 anschaut, die den Anzahlen der Zeichenklassen der triadischen, tetradischen, pentadischen und hexadischen Semiotik entsprechen, so fällt auf, daß es sich hier um 2-, 3-, 4- und 5-dimensionale Zahlen handelt, die eine Teilmenge der figurativen Zahlen bilden, worunter man bekanntlich natürliche Zahlen versteht, die "Anzahlen von Punkten darstellen, welche gleichmäßig auf den Ecken, den Seiten und im Innern von regelmäßigen ebenen oder räumlichen Figuren verteilt sind" (Flachsmeyer 1969: 74). Figurative Zahlen entstehen "durch fortschreitendes Summieren der Glieder einer arithmetischen Reihe" (Bischoff 1997: 179). Mehrdimensionale Zahlen lassen sich am einfachsten mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks darstellen:

1	1	1	1	1	1	1	1	.1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	.9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Während die erste Zeile und Spalte aus Einserfolgen besteht, finden wir in der zweiten Zeile und Spalte die Folge der natürlichen Zahlen, also die eindimensionalen Zahlen. In der dritten Zeile und Spalte stehen die zweidimensionalen Dreieckszahlen, in der vierten die dreidimensionalen Tetraederzahlen, in der fünften die vierdimensionalen Zahlen, in der sechsten die fünfdimensionalen Zahlen, usw. Diese lassen sich nicht nur aus dem Pascalschen Dreieck ablesen, sondern auch durch einfache Formeln berechnen:

Dreieckszahlen:	1, 3, 6, **10**, 15, 21, 28, 36, 45, 55, … ½ n (n + 1)
Tetraederzahlen:	1, 4, 10, 20, **35**, 56, 84, 120, 165, 220, … 1/6 n (n + 1) (n + 2)
4-dimensionale Zahlen:	1, 5, 15, 35, 70, **126**, 210, 330, 495, 715, … 1/24 n (n + 1) (n + 2) (n + 3)
5-dimensionale Zahlen:	1, 6, 21, 56, 126, 252, **462**, 792, 1287, 2002, … 1/120 n (n + 1) (n + 2) (n + 3) (n + 4)

Die in der obigen Darstellung fett markierten Zahlen sind also zugleich die Anzahlen der triadischen, tetradischen, pentadischen und hexadischen Semiotiken. Damit korrespondieren also zweidimensionale Zahlen mit der triadischen Semiotik, dreidimensionale mit der tetradischen Semiotik …, allgemein: n-dimensionale Zahlen mit der n+1-dimensionalen Semiotik, und zwar gibt offenbar die n+2-te n-dimensionale Zahl einer n+1-adischen Semiotik die Anzahl derer Zkl×Rth an.

Ein weiterer interessanter Zusammenhang ergibt sich zwischen den mehrdimensionalen Zahlen und den Anzahlen der Trichotomien eines vollständigen triadischen, tetradischen, pentadischen, hexadischen, … n-adischen Dualsystems. Wie wir gesehen haben, findet in der triadischen Semiotik Trichotomienwechsel zwischen der 6. und der 7. sowie zwischen der 9. und 10. Zkl×Rth statt. Die 10 triadischen Zkln×Rthn unterteilen sich also in 3 Trichotomien, und zwar in eine mit 6 Zkln×Rth, in eine mit 3 Zkln×Rthn und in eine mit 1 Zkl×Rth. In der tetradischen Semiotik findet Trichotomienwechsel zwischen der 20. und der 21., zwischen der 30. und der 31. und zwischen der 34. und der 35. Zkl×Rth statt. Die 35 tetradischen Zkl×Rth unterteilen sich somit in 4 Trichotomien, und zwar in eine mit 20 Zkl×Rth, in eine mit 10, in eine mit 4 und in eine mit 1 Zkl×Rth. Stellen wir diese Anzahlen mit den entsprechenden Anzahlen in der pentadischen und hexadischen Semiotik zusammen:

Triadische Semiotik:	3 Trichotomien; Anzahlen: 6, **3**, 1
Tetradische Semiotik:	4 Trichotomien; Anzahlen: 20, 10, **4**, 1

Pentadische Semiotik:	5 Trichotomien; Anzahlen: 70, 35, 15, **5**, 1

Hexadische Semiotik:	6 Trichotomien; Anzahlen: 252, 126, 56, 21, **6**, 1

Wie man leicht erkennt, sind die Anzahlen der Trichotomien der ersten n für n ≤ 6 wieder die ersten n-dimensionalen Zahlen für n ≤ 5, nur in umgekehrter Reihenfolge. Offenbar gibt also die jeweils zweite n-dimensionale Zahl die Anzahl der Trichotomien einer n+1-adischen Semiotik an. Damit kann man nun auch die Orte der Trichotomienwechsel auf einfache Weise bestimmen: Man subtrahiert von der n-ten Zahl nacheinander zuerst die erste Zahl, dann die Summe aus der ersten und zweiten Zahl, dann diejenige aus der ersten, zweiten und dritten Zahl …, nicht aber die Summe der ersten und der n–1ten Zahl, da diese Differenz 0 beträgt und trivialerweise der Anfang eines semiotischen Dualsystems kennzeichnet.

Ein Beispiel soll das angegebene Verfahren illustrieren: Hierzu kehren wir zu unserer obigen Tabelle der mehrdimensionalen Zahlen zurück. Wir überprüfen die Orte der Trichotomienwechsel der tetradischen Semiotik. Die Anzahl der Zkln×Rthn der tetradischen Semiotik beträgt 35. Sei also 35 die n-te Zahl. Dann sind die ersten n–1 Zahlen: 1, 4, 10, 20. Wir subtrahieren also zuerst 35 – 1 = 34, dann 35 – (1 + 4) = 30 und schließlich 35 – (1 + 4 + 10) = 20 und erhalten so die Nummern der jeweils letzten Zkln×Rthn vor einem Trichotomienwechsel. Durch einfaches Addieren von 1 erhält man die jeweils ersten Zkln×Rthn nach dem Trichotomienwechsel. Durch Umkehrung der so gewonnenen

Zahlenpaare bekommt man die vollständige Anzahl der Trichotomienwechsel der tetradischen Semiotik: 20/21, 30/31, 34/35. Ein Kontrollblick auf die Übersicht der Zkln×Rthn der tetradischen Semiotik bestätigt, daß das erhaltene Resultat korrekt ist.

Nach diesem Exkurs zum Zusammenhang von n-dimensionalen Zahlen, n-adischen Semiotiken, der Anzahl ihrer Zkln×Rthn, der Anzahl ihrer Trichotomien und den Orten ihrer Trichotomienwechsel wollen wir nun noch die strukturellen Besonderheiten nennen, die auftreten, wenn man von der tetradischen zur pentadischen und hexadischen Semiotik fortschreitet.

Für die pentadische Semiotik können wir folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Neben dyadischen und triadischen treten erwartungsgemäß nun tetradische Thematisationstypen auf.

2. Bei den triadischen Thematisationen tauchen Typen der Form $X^mY^m \leftarrow Z^n$ bzw. $Z^n \rightarrow X^mY^m$ mit $n \leq 3$ auf. An Sandwich-Thematisationen erscheinen nun zentrifugale der Form $X^m \leftarrow Y^n \rightarrow Z^m$ neben zentripetalen der Form $X^m \rightarrow Y^n \leftarrow Z^m$.

3. Bei den tetradischen Thematisationen treten Typen der Form $X^mY^mZ^m \leftarrow A^n$ bzw. $A^n \rightarrow X^mY^mZ^m$ auf. Als neuer Typ von Sandwich-Thematisationen erscheinen linksmehrfache Sandwiches der Form $X^mY^m \leftarrow A^n \rightarrow Z^m$ sowie rechtsmehrfache der Form $X^m \leftarrow A^n \rightarrow Y^mZ^m$, die bereits in der tetradischen Realität der Tetratomischen Tetraden erstmals auftauchten.

4. Pentadische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten.

5. Als wichtigstes Resultat ergibt sich jedoch, daß die zu erwartenden Pentatomischen Pentaden (dyadischer, triadischer und tetradischer Thematisation) nicht konstruierbar sind, da die Regel zur Bildung Trichotomischer Triaden, die noch bei den Tetratomischen Tetraden Anwendung fand, hier offenbar nicht mehr anwendbar ist, da von den zahlreichen neu auftretenden Sandwiches nicht klar ist, ob und wie sie in die Pentatomischen Pentaden integriert sind.

Für die hexadische Semiotik können wir schließlich folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Erwartungsgemäß treten dyadischen, triadischen und tetradischen nun auch pentadische Thematisationstypen auf.

2. Bei den dyadischen Thematisationen treten Sandwiches unklarer Thematisationsrichtung der Form $X^m \leftrightarrow Y^m$ auf.

3. Bei den triadischen Thematisationen sind die Thematisationsrichtungen im Grunde unklar. Versuchsweise könnten drei Gruppen gebildet werden: 1. Solche, deren linke Kategorie die Gestalt X^1 hat. 2. Solche, deren rechte Kategorie die Gestalt X^1 hat. 3. Solche, deren mittlere Kategorie die Gestalt X^1 hat, die aber weder zu 1. noch zu 2. gehören (Sandwiches). Ausdifferenzierungen und andere Gruppierungen sind aber möglich. Die triadischen Sandwiches der Form $X^m \leftrightarrow Y^n \leftrightarrow Z^m$ weisen, wie schon die dyadischen, unklare Thematisationsrichtung auf.

4. Für die tetradischen Thematisationen gilt das zu den triadischen Gesagte. Auch die tetradischen Sandwiches der Form $A^m \leftrightarrow X^n Y^n \leftrightarrow B^m$ weisen, wie bereits die dyadischen und die triadischen, unklare Thematisationsrichtung auf.

5. Für die pentadischen Thematisationen gilt das zu den tetradischen Gesagte.

6. Hexadische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten.

7. Für die zu erwartenenden Hexatomischen Hexaden gilt das zu den Pentatomischen Pentaden Gesagte, nur daß hier noch mehr Verwirrung herrscht.

5. Trichotomienwechsel und Strukturen

Selbstverständlich können höherwertige Semiotiken herangezogen werden; theoretisch könnte man eine infinite Semiotik postulieren. Auch wenn Peirce hat, dass sich n-adische Relationen mit $n > 3$ formal auf Relationen mit $n = 3$ reduzieren lassen, so ist dies in qualitativer Hinsicht nicht möglich, so dass sich der Ausblick von $n = 4$, $n = 5$ und $n = 6$ (ganz zu schweigen von noch größerem n) lohnt, da polyadische Semiotiken Strukturen aufweisen, die in der triadischen Semiotik gar nicht oder erst ansatzweise auftreten.

So konnten wir etwa feststellen, dass n-adische Semiotiken über n–2 n-tomische n-aden verfügen, so dass also die Trichtomischen Triaden der triadischen Semiotik nur einen Spezialfall für $n = 3$ mit $3 – 2 = 1$ darstellen.

Die Betrachtung polyadischer Semiotiken führte uns ferner auf ein allgemeines Verfahren zur Berechnung der Anzahl Zkln×Rthn sowie der Anzahl von Trichotomien und der Orte der Trichotomienwechsel einer beliebigen n-adischen Semiotik.

Bemerkenswert ist ferner die Feststellung, daß es in n-adischen Semiotiken mit $n \geq 5$ nicht mehr eindeutig möglich ist, n-tomische n-aden zu konstruieren. Man mag sich hier an die Gödelschen Unvollständigkeitssätze höherer Prädikatenkalküle erinnern, in denen bekanntlich die Widerspruchsfreiheit eines formalisierten Systems nicht innerhalb des Systems selbst nachgewiesen werden kann. Während aber die Widerspruchsfreiheit eines prädikatenlogischen Systems der Stufe n in einem System der Stufe n+1 nachweisbar ist, tragen semiotische Systeme der Stufe n+1 nichts dazu bei, n-tomische n-aden zu konstruieren! Immerhin können wir die Parallele soweit treiben, daß die folgende Feststellung zur Prädikatenlogik der 1. Stufe sich auch auf die triadische Semiotik übertragen läßt, dasss nämlich "kein logisches System, welches die Logik der 1. Stufe erweitert, auch deren Vorzüge besitzen kann"(Ebbinghaus, Flum und Thomas 1996, S. vi) – und dies mag der tiefste Grund dafür sein, daß man sich bisher auf die triadische Semiotik beschränkt hatte.

Bibliographie

Ebbinghaus, Heinz Dieter et al., Mathematische Logik. Heidelberg 1996

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Zur Theorie der Realtionalzahlen I. In: Electronic Journal for Mathematical Semiocs, 2001

13.4.2011